大阪学院大学経済論集
第24巻第1号、2010年6月

経済構造変化とクロスセクション間の従属性がパネル単位根検定に与える影響について

松木　　隆

要旨

本論文では、パネルデータに存在する経済構造変化とクロスセクション間の相関がパネル単位根検定の挙動に与える影響について、漸近理論とシミュレーション実験に基づいて考察する。同時に、回帰式におけるARパラメータ推定量の起こりうるバイアスについても検討する。分析対象として、一般的に用いられる2つのタイプの検定統計量を取り上げる。1つはデータをプールして回帰を行うことにより得られるt統計量（Levin, Lin, and Chu (2002)タイプの統計量）であり、もう1つは各クロスセクション単位について個別に回帰を行い、得られたt統計量のクロスセクション平均を基準化した統計量（Im, Pesaran, and Shin (2003)タイプの統計量）である。また、係数推定量はそれぞれの回帰式におけるARパラメータ推定量である。

キーワード：パネル単位根検定、構造変化、クロスセクション間の相関、パネルデータ
JEL分類番号：C12; C15; C22.

1. はじめに

現在、パネルデータにおける単位根や共和分に関する理論研究は盛んに行われており、また応用分野におけるパネル単位根・共和分検定手法を利用した研究も数多くなされている。金利平価説や購買力平価説の検証、1人当たり所得コンバージェンスの確認、R&Dスピルオーバー効果の評価などはよく見られる実証研究である[1)]。

パネル単位根検定の開発は、Levin and Lin (1993)、Quah (1990、1994)、Breitung and Meyer (1994) による単位根検定のパネルデータへの拡張が端緒であった。しかし、これらの研究で開発された手法が試行的であったため、一般的な利用までには至らなかった。しかしその後、Maddala and Wu (1999)、Breitung (2000)、Levin, Lin, and Chu (2002)（以降 LLC）、Im, Pesaran, and Shin (2003)（以降 IPS）らによって汎用性を持った検定及び検定手順の提案がなされたため、パネル単位根検定は実証研究に広く浸透することとなった。特に、LLC 検定と IPS 検定は、現在でも実証研究においてしばしば利用されている[2)]。

しかしながら、現実のパネルデータが持ちうる特性を考えた場合、LLC 検定や IPS 検定を適用する際には少なくとも2つの制約をデータに課さねばならない。1つはクロスセクション間におけるデータの独立性であり、もう1つ

---

1) Banerjee (1999) や Baltagi and Kao (2000) では、初期の研究を含むサーベイがなされている。最近の理論的展開に関しては、Breitung and Pesaran (2005) が参考になる。また、Nelson (2001) のいくつかの章には、国際経済学や国際金融論の問題に関する適用例が示されている。

2) クロスセクション間の独立性を仮定するこれらの検定は、「第1世代」の検定と呼ばれる。一方、Bai and Ng (2004)、Moon and Perron (2004)、Pesaran (2007) らの手法は、dynamic factor model を仮定して相関構造を検定に取り込んでおり、「第2世代」の検定と呼ばれる。

は時間軸・空間軸の両方向におけるデータの連続性である。前者は検定構築の際にデータ生成モデルの誤差項の独立性として明示的に仮定されており、後者は上記の検定に限らず多くの検定において暗黙裡に仮定されている。現実のパネルデータ、例えばGDPや為替レートなどのクロスカントリー・パネルでは、各国間（クロスセクション間）においてある程度の相関が存在すると考えるのが妥当であるから、独立性の条件の成立は現実的には難しい。また、仮説検定において、検定の十分な検出力確保のためには時間軸方向にできる限り長いデータを取る必要があるため、採用されるデータが不連続な経済構造変化（例えば、突発的災害、戦争、石油危機、政策転換、経済危機など）を含む可能性は高いといえる。つまり、LLC検定やIPS検定を現実データに適用する場合、前提条件のどちらか一方または両方が崩れている状況が考えられる。

本研究では、上述の前提条件が満たされない場合、すなわちパネルデータに経済構造変化やクロスセクション間の相関が存在する場合において、LLC検定とIPS検定がどのような検定結果をもたらすのかについて詳細に検討を行う。具体的には、漸近理論に基づいた検定統計量の極限分布の導出とモンテ・カルロ・シミュレーションによる有限標本での検定の棄却頻度の計算を行い、得られた結果の評価を行う。同時に、回帰式から得られる係数推定量について、そのバイアスに関しても考察を行う。

本稿で想定するデータ生成過程は、LLC検定、IPS検定のそれよりも単純化したものである。そのため、厳密に言えば、ここで対象とする検定はLLC検定、IPS検定とは異なる。そこで、これ以降においては、それぞれの検定を「LLCタイプの検定」、「IPSタイプの検定」と呼び区別を図ることにする。

次節では、考察対象の2つの検定について、それらの構築方法と検定統計量の極限分布について説明する。第3節では、パネルデータに経済構造変化が存在する場合について、回帰式の係数推定量と検定統計量に起こりうる問題を考察する。第4節では、クロスセクション間に存在するデータの相関について、

データ生成過程における誤差項間の相関としてモデル化し係数推定量と検定統計量に与える影響を考察する。第5節では、経済構造変化とクロスセクション間の相関が並存する場合において、係数推定量と検定統計量に与えるそれらの混合効果を評価する。第6節では、本論文で得られた結果について簡単にまとめる。

2．パネル単位根検定

本節では、パネルデータ（$\{y_{it}\}$、$i=1,\ldots,N$、$t=1,\ldots,T$）を用いた単位根検定として、Levin, Lin, and Chu (2002) タイプの検定と Im, Pesaran, and Shin (2003) タイプの検定を紹介する。LLC 検定はデータをプールして回帰を行うことにより得られる t 統計量を利用し、IPS 検定は各クロスセクション単位（i）について個別に回帰を行い、得られた N 個の t 統計量のクロスセクション平均を基準化した統計量を使用する。以下の説明を容易にするために、ここでは前者を t_{pool} 検定、後者を Z_{bar} 検定と呼ぶことにする[3]。

2．1．t_{pool} 検定

パネルデータの生成プロセス（DGP、Data Generating Process）を以下の(1)式と仮定する。また、回帰式には以下の(2)式を用いる。

$$\Delta y_{it} = \phi_i y_{it-1} + \varepsilon_{it} \qquad \varepsilon_{it} \sim i.i.d.\ (0,1) \text{ for all } i \text{ and } t \tag{1}$$

$$\Delta \mathrm{y} = \phi_{pool} \mathrm{y}_{-1} + \varepsilon \qquad i=1,\ldots,N、t=1,\ldots,T \tag{2}$$

3) 検定統計量の構築方法としては、本稿で取り上げる2つの方法のほかに、Tippet (1931) や Fisher (1932) による複数の独立な検定の p 値を組み合わせる方法もある。後に、Fisher の方法については、Maddala and Wu (1999) と Choi (2001) がブートストラップ法を用いて p 値が相関を持つ場合に拡張している。

ここで、y、εは以下のベクトルである。

$$\mathrm{y} = (y_{11}, \cdots, y_{N1}, \cdots, y_{1T}, \cdots, y_{NT})' = (\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_\mathrm{T})'$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \cdots, \varepsilon_{N1}, \cdots, \varepsilon_{1T}, \cdots, \varepsilon_{NT})' = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\mathrm{T})'$$

$$\mathrm{y}_\mathrm{t} = (y_{1t}, \cdots, y_{Nt})' \quad \varepsilon_\mathrm{t} = (\varepsilon_{1t}, \cdots, \varepsilon_{Nt})'$$

帰無仮説H_0及び対立仮説H_1を以下のように設定する[4)]。

$$H_0 : \phi_{pool} = 0$$

$$H_1 : \phi_{pool} < 0$$

(2)式を、$i = 1, \ldots, N$、$t = 1, \ldots, T$に関して回帰して得られるϕ_{pool}のOLS推定量は

$$\hat{\phi}_{pool} = \frac{\mathrm{y}_{-1}'\Delta\mathrm{y}}{\mathrm{y}_{-1}'\mathrm{y}_{-1}} = \frac{\sum_{t=2}^{T}\mathrm{y}_{\mathrm{t}-1}'\Delta\mathrm{y}_\mathrm{t}}{\sum_{t=2}^{T}\mathrm{y}_{\mathrm{t}-1}'\mathrm{y}_{\mathrm{t}-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}y_{it-1}\Delta y_{it}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}y_{it-1}^2} \tag{3}$$

であり、対応するt統計量は

$$t_{pool} = \frac{\mathrm{y}_{-1}'\Delta\mathrm{y}}{s\sqrt{\mathrm{y}_{-1}'\mathrm{y}_{-1}}} = \frac{\sum_{t=2}^{T}\mathrm{y}_{\mathrm{t}-1}'\Delta\mathrm{y}_\mathrm{t}}{s\sqrt{\sum_{t=2}^{T}\mathrm{y}_{\mathrm{t}-1}'\mathrm{y}_{\mathrm{t}-1}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}y_{it-1}\Delta y_{it}}{s\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}y_{it-1}^2}} \tag{4}$$

である。ここで、$s^2 = (N(T-1))^{-1}(y - \hat{\rho}_{pool}\mathrm{y}_{-1})'(\mathrm{y} - \hat{\rho}_{pool}\mathrm{y}_{-1})$。クロス

4) 回帰式が(2)式である場合、帰無仮説と対立仮説の両方において、係数にhomogeneity制約を課すことになる。つまり、帰無仮説の下では、全てのクロスセクション単位iにおいて$\phi_i = 0$（$\phi_\mathrm{i} = 0$ for all i）を要求し、対立仮説の下では、全てのiについて$\phi_i < 0$（$\phi_\mathrm{i} < 0$ for all i）を要求する。

セクション数Nを固定した下で、$T\to\infty$のときのt_{pool}の極限分布は

$$t_{pool} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 W_i(r)\,dW_i(r)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 W_i^2(r)\,dr}}$$

となる。ここで、⇒は弱収束を表し、$W(r)$は$r\in[0,1]$における標準ブラウン運動である。さらに、$N\to\infty$のとき、

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 W_i(r)\,dW_i(r)}{\sqrt{N}} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i^2(1)-1)}{\sqrt{N}} \xrightarrow{d} N(0,1/2)$$

であり、Nyblom (1989) より

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 W_i^2(r)\,dr}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty}\pi^{-2}(j-1/2)^{-2}x_i^2(N)}{N} \xrightarrow{p} \frac{1}{2}$$

であることが示されているので、

$$t_{pool} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

を得る。ここで、$\xrightarrow{p}$ および $\xrightarrow{d}$ はそれぞれ確率収束と分布収束を表す。また、上記の結果は$\sqrt{N}/T\to 0$であれば、Joint Limit Theory（NとTが同時に無限大に近づく場合（$N, T\to\infty$）の漸近理論）でも導出できる（Levin *et al.* (2002)）[5]。

2．2．Z_{bar}検　定

DGP を(1)式とし、回帰式を以下の式とする。

5）Joint Limit Theory については、Phillips and Moon (1999) を参照。

$$\Delta y_{it} = \phi_i y_{it-1} + \varepsilon_{it} \qquad t = 1, \ldots, T \tag{5}$$

上式を各 i に関して個々に回帰して得られる ϕ_i の OLS 推定量は

$$\hat{\phi}_i = \frac{\sum_{t=2}^{T} y_{it-1} \Delta y_{it}}{\sum_{t=2}^{T} y_{it-1}^2} \tag{6}$$

である。また、t 統計量は以下の式で与えられる。

$$t_i = \frac{\sum_{t=2}^{T} y_{it-1} \Delta y_{it}}{s_i \sqrt{\sum_{t=2}^{T} y_{it-1}^2}} \tag{7}$$

ここで、$s_i^2 = (T-1)^{-1} \sum_{t=2}^{T} (y_{it} - \hat{\rho}_i y_{it-1})^2$。$t_i$ は Dickey-Fuller の t 値タイプ統計量であり、単位根帰無仮説の下での極限分布は良く知られた Dickey-Fuller 分布である。

$$t_i \Rightarrow \frac{\int_0^1 W_i(r)\, dW_i(r)}{\sqrt{\int_0^1 W_i^2(r)\, dr}} = \eta_i$$

t_i の極限分布の期待値 $E(\eta_i)$ と分散 $Var(\eta_i)$ は Nabeya (1999) により与えられている。誤差項における独立性の仮定より t_i も互いに独立となるから、$\bar{t} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} t_i$ を考え、

$$Z_{bar} = \frac{\sqrt{N}\ \{\bar{t} - E(t)\}}{\sqrt{Var(t)}} \tag{8}$$

を定義すると、帰無仮説の下で$N\rightarrow\infty$のとき、Lindeberg-Lévy Central Limit Theoremより

$$Z_{bar} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

を得る。ここでの帰無仮説及び対立仮説は

$$H_0: \phi_i = 0 \quad \text{for all } i$$
$$H_0: \phi_i < 0 \quad \text{for some } i$$

であり、このZ_{bar}検定においては、対立仮説において$\phi_i<0$がいくつかのiについて成立していればよい。

誤差項に自己相関がない場合、Z_{bar}統計量の漸近分布はJoint Limit Theoryで導出可能である。しかし、仮定に反して誤差項に自己相関が存在し、t_iとしてAugmented Dickey-Fuller（ADF）統計量を用いる場合には、有限のTの下ではADFt統計量がモデルに含まれる一階階差項（Δy_{it}）の係数パラメータに依存するため、上記の標準化による導出は不適切である。したがって、この場合には、$N/T\rightarrow c$（cは定数）を仮定するか、Sequential Limit Theory（$T\rightarrow\infty$の後、$N\rightarrow\infty$となる状況の下での漸近理論）により導出する[6)]。

3．構造変化の存在が係数推定量とパネル単位根検定に与える影響

3．1．Ignored Structural Breakの問題

単一の時系列データに関して単位根検定を実行する際に、その時系列データがトレンド関数の上下シフトや傾きの屈折で表現されるような経済構造変化を持つ場合、それを無視してDickey-Fullerの検定を行うと結果に深刻なバイア

6）Sequential Limit Theoryについては、Phillips and Moon (1999)を参照。

スを生じることがいくつかの研究により明らかにされている。Leybourne, *et al.* (1998)、Montanes and Reyes (1999) らは、単位根帰無仮説が正しい下での検定の深刻なサイズの歪みを示している。一方、Perron (1989)、Montanes and Reyes (1998)、Leybourne and Newbold (2000) は、定常性を主張する対立仮説に対して、大幅なパワー低下があることを証明している。また、Ng and Vogelsang (2002) は VAR モデルにおける homogeneous な構造変化が AR 係数推定量のバイアスをもたらすことを示している。

以下では、データ生成過程がレベルのシフトで表される 1 回の構造変化を持つ場合について、(3)式と(6)式で定義される係数推定量（$\hat{\phi}_{pool}$、$\hat{\phi}_i$）と(4)式と(8)式で定義されるパネル単位根検定統計量（t_{pool}、Z_{bar}）がそれぞれどのような極限分布に収束するのか、またパラメータ推定や仮説検定においてどのような問題が発生しうるのかについて考察を行う。

ここでの DGP は以下のモデルを想定する。

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= d_{it} + z_{it} \\
z_{it} &= \rho_i z_{it-1} + \varepsilon_{it} \qquad \varepsilon_{it} \sim i.i.d.\,(0, \omega_{it}) \quad \text{for all } i \text{ and } t
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ここで、$\omega_{it} < \infty$ for all i であり、E $(\varepsilon_{it}^4) < \infty$ for all i and t であると仮定する。d_{it} はブレイクを表す変数であり、以下の値をとる。

$$d_{it} = \alpha_i \, DU_{it}$$

DU_{it} は、$t > \tau_i T$ のとき $DU_{it} = 1$、その他のときは 0 をとるダミー変数である。α_i は構造変化の大きさを表すパラメータであり、$\alpha_i = \delta_i T^{k/2}$ $(k = 0, 1)$ とする（δ_i は定数)。つまり、構造変化の大きさは、$k = 0$ のとき時系列数 T に関係なく一定（δ_i）であり、$k = 1$ のとき時系列数 T の増加と伴に $\sqrt{T}$ の速度で拡大する。τ_i はブレイク・フラクションであり、$\tau_i = TB_i / T$ for all T、$0 < \tau_i < 1$ である。

回帰式は、$\hat{\phi}_{pool}$、t_{pool} の計算に(2)式を用い、$\hat{\phi}_i$、Z_{bar} の計算には(5)式を用いる。また、t_{pool} 検定と Z_{bar} 検定の帰無仮説及び対立仮説は、それぞれ以下の(10)式と(11)式である。

$$H_0：\phi_{pool}=0 \quad \text{vs} \quad H_1：\phi_{pool}<0 \tag{10}$$

$$H_0：\phi_i=0 \quad \text{for all } i \quad \text{vs} \quad H_1：\phi_i<0 \quad \text{for some } i \tag{11}$$

3．2．帰無仮説の下で構造変化の存在を無視した場合の影響

ここでは、N を固定した下での $T\to\infty$ の場合について、構造変化の大きさを表すパラメータが $\alpha_i=\delta_i(k=0)$ または $\alpha_i=\delta_i T^{1/2}(k=1)$ であるときの極限分布を以下に示す。また、得られた結果より、構造変化の存在の影響について考察する。

定理1． *DGPを(9)式とし、$\alpha_i=\delta_i$ のとき、$T\to\infty$ について以下の結果を得る*[7]。
（i）*(10)式の帰無仮説の下、(2)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

$$\hat{\phi}_{pool} \xrightarrow{p} 0 \qquad \text{for any } N$$

$$t_{pool} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{N}\omega_{ii}\int_0^1 W_i(r)\,dW_i(r)}{\sqrt{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\omega_{ii}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\omega_{ii}\int_0^1 W_i^2(r)\,dr}} \qquad \text{for fixed } N$$

（ii）*(11)式の帰無仮説の下、(5)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する*[8]。

7）紙面制約のため、本稿で示される全ての定理の証明を省略する。
8）$E(t)$ と $Var(t)$ は共に有限とする。また、以降の定理においても同様の仮定を置く。

$$\hat{\phi}_i \xrightarrow{p} 0$$

$$Z_{bar} = \frac{\sqrt{N}\cdot\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T} y_{it-1}\,\Delta y_{it}}{N\cdot s_i\sqrt{\sum_{t=2}^{T} y_{it-1}^2}} - E(t)\right]}{\sqrt{Var(t)}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{N}\cdot\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\omega_{ii}\int_0^1 W_i(r)\,dW_i(r)}{N\cdot\omega_{ii}\sqrt{\int_0^1 W_i^2(r)\,dr}} - E(t)\right]}{\sqrt{Var(t)}} \qquad \text{for fixed } N$$

定理２．*DGPを(9)式とし、$\alpha_i = \delta_i T^{1/2}$のとき、$T\to\infty$について以下の結果を得る。*

（i）(10)式の帰無仮説の下、(2)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。

$$\hat{\phi}_{pool} \xrightarrow{p} 0 \qquad \text{for any } N$$

$$t_{pool} \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\left\{\omega_{ii}\int_0^1 W_i(r)\,dW_i(r) + \sqrt{\omega_{ii}}\,\delta_i W_i(1)\right\}}{\sqrt{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\omega_{ii}+\delta_i^2)\sum_{i=1}^{N}\left\{\omega_{ii}\int_0^1 W_i^2(r)\,dr + \delta_i^2(1-\tau_i) + 2\sqrt{\omega_{ii}}\,\delta_i\int_{\tau_i}^1 W_i(r)\,dr\right\}}}$$

for fixed N

（ii）⑾式の帰無仮説の下、⑸式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。

$$\hat{\phi}_i \xrightarrow{p} 0$$

$$t_i \Rightarrow$$

$$\frac{\omega_{ii}\int_0^1 W_i(r)\,dW_i(r)+\sqrt{\omega_{ii}}\,\delta_i W_i(1)}{\sqrt{(\omega_{ii}+\delta_i^2)}\sqrt{\omega_{ii}\int_0^1 W_i^2(r)\,dr+\delta_i^2(1-\tau_i)+2\sqrt{\omega_{ii}}\,\delta_i\int_{\tau_i}^1 W_i(r)\,dr}}=\kappa_i$$

$$Z_{bar}\Rightarrow\frac{\sqrt{N}\left\{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\kappa_i-E(t)\right\}}{\sqrt{Var(t)}}\qquad \text{for fixed } N$$

定理1より、構造変化の大きさが$\alpha_i=\delta_i$のとき、係数の推定量（$\hat{\phi}_{pool}$、$\hat{\phi}_i$）と検定統計量（t_{pool}、Z_{bar}）の全てについて、極限分布は構造変化に関わるパラメータ（δ_iやτ_i）を含まない。したがって、時系列数Tが十分大きいならば、クロスセクション数Nの大きさに関係なく、係数推定量と検定統計量は構造変化の存在に影響を受けないことが分かる。また、係数推定量は依然として真の値（$\phi_{pool}=0$、$\phi_i=0$）に確率収束し、検定統計量についても全てのiについて構造変化が存在しない場合で想定される極限分布に分布収束する。

定理2より、構造変化の大きさが$\alpha_i=\delta_i T^{1/2}$のとき、係数推定量は構造変化の存在に影響を受けず真の値に収束する。しかしながら、検定統計量の極限分布は共にパラメータδ_iとτ_iを含む。したがって、それらのパラメータ値によって統計量の挙動は影響を受ける。

⑼式のDGPにおいて、全てのiに関して、$\tau_i=0.1$、$\rho_i=1.0$、$\omega_{ii}=1.0$とし、さらに誤差項ε_{it}に正規性を仮定したもとで、（N, T）のいくつかの組み合わせに関してそれぞれ5,000回の繰り返し計算を行い、ϕ_{pool}、ϕ_iの推定値の

平均値と t_{pool}、Z_{bar} 検定の棄却頻度（ここでは実質サイズとなる）を計算した[9)]。表１(ａ)に各係数の平均値、表２(ａ)に各統計量の棄却頻度を示す。表１(ａ)より、$\hat{\phi}_i$ の平均値について、T が小さいとき（$T=25$)、構造変化が存在しないかその影響が小さい場合において、ゼロから下方への乖離幅が大きい。したがって、若干の下方バイアスが発生している。表２(ａ)より、t_{pool}、Z_{bar} 検定について、構造変化の程度が大きいとき（$\alpha=7, 10$)、観察される棄却頻度は有意水準５％より小さいことから、共に若干の過小棄却（under-rejection）となっている。考えられる理由としては、定理２で示されている t_{pool} と t_i の極限分布の分母にある δ_i^2 の項について、この項が他の項に比して速く増大することにより、統計量がゼロに近づいていく（統計量の分散が縮小する）ことが挙げられる。

表１(ａ)係数推定値（$\rho=1.0$, $\tau=0.1$, $\omega_{ii}=1.0$)

N	T	No Break		α=1		α=5		α=7		α=10	
		$\hat{\phi}_{\mathrm{i}}$	$\hat{\phi}_{\mathrm{pool}}$	$\hat{\phi}_{\mathrm{i}}$	$\hat{\phi}_{\mathrm{pool}}$	$\hat{\phi}_{\mathrm{i}}$	$\hat{\phi}_{\mathrm{pool}}$	$\hat{\phi}_{\mathrm{i}}$	$\hat{\phi}_{\mathrm{pool}}$	$\hat{\phi}_{\mathrm{i}}$	$\hat{\phi}_{\mathrm{pool}}$
5	25	-0.062	-0.011	-0.061	-0.011	-0.042	-0.006	-0.028	-0.003	-0.014	-0.002
	50	-0.033	-0.006	-0.033	-0.006	-0.029	-0.004	-0.023	-0.003	-0.015	-0.002
	100	-0.017	-0.003	-0.017	-0.003	-0.016	-0.002	-0.015	-0.002	-0.012	-0.002
25	25	-0.062	-0.002	-0.061	-0.002	-0.041	-0.001	-0.027	-0.001	-0.014	0.000
	50	-0.033	-0.001	-0.033	-0.001	-0.028	-0.001	-0.023	-0.001	-0.015	0.000
	100	-0.017	-0.001	-0.017	0.000	-0.016	0.000	-0.015	0.000	-0.012	0.000
50	25	-0.062	-0.001	-0.062	-0.001	-0.042	-0.001	-0.027	0.000	-0.014	0.000
	50	-0.033	-0.001	-0.033	-0.001	-0.028	0.000	-0.023	0.000	-0.015	0.000
	100	-0.017	0.000	-0.017	0.000	-0.016	0.000	-0.015	0.000	-0.012	0.000

9) 実質サイズとは、帰無仮説の下で想定される分布において、例えば１％や５％の有意水準（名目サイズ）を与える棄却値（critical value）を設定した時、データから得られた統計量の実際の分布において設定した棄却値が与える確率のことである。ここでは、有意水準５％のもとでの実質サイズを計算している。

表2 (a) 検定のサイズ (ρ =1.0, τ =0.1, ω_{ii}=1.0)

N	T	No Break			α=1			α=5			α=7			α=10		
		t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}
5	25	0.051	0.072	0.044	0.049	0.071	0.045	0.025	0.023	0.011	0.010	0.008	0.002	0.002	0.001	0.000
	50	0.048	0.080	0.043	0.050	0.079	0.048	0.039	0.045	0.026	0.026	0.025	0.013	0.012	0.006	0.002
	100	0.049	0.081	0.051	0.050	0.077	0.047	0.045	0.056	0.030	0.040	0.043	0.030	0.027	0.025	0.010
25	25	0.051	0.066	0.050	0.050	0.054	0.046	0.025	0.014	0.005	0.010	0.004	0.000	0.001	0.000	0.000
	50	0.049	0.059	0.046	0.049	0.056	0.042	0.039	0.030	0.020	0.028	0.016	0.005	0.011	0.004	0.000
	100	0.049	0.063	0.045	0.049	0.057	0.045	0.046	0.048	0.032	0.039	0.033	0.024	0.026	0.019	0.006
50	25	0.051	0.057	0.054	0.050	0.057	0.051	0.025	0.012	0.001	0.010	0.004	0.000	0.002	0.001	0.000
	50	0.050	0.059	0.054	0.049	0.054	0.050	0.039	0.026	0.015	0.028	0.017	0.003	0.011	0.004	0.000
	100	0.050	0.059	0.047	0.049	0.057	0.050	0.045	0.044	0.030	0.039	0.032	0.018	0.026	0.015	0.002

3．3．対立仮説の下で構造変化の存在を無視した場合の影響

前節と同様に、Nを固定した下での$T\to\infty$の場合について、$\alpha_i=\delta_i$または$\alpha_i=\delta_i T^{1/2}$のときの収束結果を以下に示す。

定理3． *DGPを(9)式とし、$\alpha_i=\delta_i$のとき、$T\to\infty$について以下の結果を得る。*

(i) (10)式の対立仮説の下、(2)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。

$$\hat{\phi}_{pool} \xrightarrow{p} \frac{-\sum_{i=1}^{N}\omega_{ii}(1+\rho_i)^{-1}}{\sum_{i=1}^{N}\left\{\omega_{ii}(1-\rho_i^2)^{-1}+\delta_i^2(1-\tau_i)\right\}} \qquad \text{for fixed } N$$

$$t_{pool}\to-\infty \qquad (as\ N,\ T\to\infty)$$

(ii) (11)式の対立仮説の下、(5)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。

$$\phi_i \xrightarrow{p} \frac{-\omega_{ii}(1+\rho_i)^{-1}}{\omega_{ii}(1-\rho_i^2)^{-1}+\delta_i^2(1-\tau_i)}$$

$$Z_{bar} \to -\infty \qquad (\text{as } N/T \to 0\text{、} N,T\to\infty)$$

定理４． *DGPを(9)式とし、$\alpha_i=\delta_i T^{1/2}$のとき、$T\to\infty$について以下の結果を得る。*

（ｉ）*(10)式の対立仮説の下、(2)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

$$\hat{\phi}_{pool} \xrightarrow{p} 0 \qquad \text{for any } N$$

$$t_{pool} \xrightarrow{p} \frac{-\sum_{i=1}^{N}\omega_{ii}(1+\rho_i)^{-1}}{\sqrt{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\delta_i^2+2\omega_{ii}(1+\rho_i)^{-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\delta_i^2(1-\tau_i)}} \quad \text{for fixed } N \tag{12}$$

$$t_{pool} \to -\infty \qquad (\text{as } N,\ T\to\infty)$$

（ii）*(11)式の対立仮説の下、(5)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

$$\hat{\phi}_i \xrightarrow{p} 0$$

$$t_i \xrightarrow{p} \frac{-\omega_{ii}(1+\rho_i)^{-1}}{\sqrt{(\delta_i^2+2\omega_{ii}(1+\rho_i)^{-1})\,\delta_i^2(1-\tau_i)}} = \kappa_i \tag{13}$$

$$Z_{bar} \xrightarrow{p} \frac{\sqrt{N}\left\{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\kappa_i - E(t)\right\}}{\sqrt{Var(t)}} \qquad \text{for fixed } N \tag{14}$$

$$Z_{bar} \to -\infty \qquad (\text{as } N, T \to \infty)$$

定理3より、$\alpha_i = \delta_i$のとき、両係数推定量はパラメータ（ω_{ii}、ρ_i、δ_i、τ_i）の一種の（非確率）関数となる。一方、t_{pool}、Z_{bar}統計量は、$N, T \to \infty$ならば（Z_{bar}統計量には$N/T \to 0$の条件も必要である）、共に$-\infty$に発散する。これより両検定の一致性が確認できる。統計量の発散速度は共に$\sqrt{NT}$であり、これは(5)式を個々に回帰して得られるt_i統計量の発散速度である$\sqrt{T}$より大きい。したがって、この場合では検定手法をパネルデータに拡張することにより検出力の増大が期待できる。

定理4より、$\alpha_i = \delta_i T^{1/2}$のとき、$\hat{\phi}_{pool}$、$\hat{\phi}_i$は真の値（$\phi_{pool} < 0$、$\phi_i < 0$）ではなく、ゼロに確率収束する。$N$を固定した下で$T \to \infty$であるとき、$t_{pool}$、$Z_{bar}$は確率的項をそれらの極限分布に含まず、パラメータ（ω_{ii}、ρ_i、δ_i、τ_i）の関数となる。また、$N, T \to \infty$のとき、共に$-\infty$に発散するので、検定の一致性はこのケースでも保持される。

3．2節におけるモンテ・カルロ実験の設定において、全てのiについて$\rho_i = 0.95$として係数推定量の平均値と検定の検出力を計算した結果が、それぞれ表1（b）と表2（b）である。表1（b）より、構造変化の程度が大きいとき（$\alpha = 3, 4$）、$\hat{\phi}_{pool}$に僅かな上方バイアスが発生する。表2（b）より、構造変化が存在する場合、個別回帰に基づくt_i検定の検出力は総じて低い。この結果は、Perron (1989)やMontanes and Reyes (1998)、Leybourne and Newbold (2000)による指摘と整合的である。また、構造変化の程度が大きく（$\alpha = 3, 4$）かつ時系列数が小さい場合（$T = 25$）、t_{pool}、Z_{bar}検定も極めて低い検出力を示す。

表１（b）係数推定値（ρ =0.95，τ =0.1，ω_{ii}=1.0）

N	T	No Break $\hat{\phi}_i$	No Break $\hat{\phi}_{pool}$	α=1 $\hat{\phi}_i$	α=1 $\hat{\phi}_{pool}$	α=2 $\hat{\phi}_i$	α=2 $\hat{\phi}_{pool}$	α=3 $\hat{\phi}_i$	α=3 $\hat{\phi}_{pool}$	α=4 $\hat{\phi}_i$	α=4 $\hat{\phi}_{pool}$
5	25	-0.112	-0.062	-0.108	-0.057	-0.092	-0.043	-0.071	-0.029	-0.053	-0.021
	50	-0.084	-0.057	-0.080	-0.052	-0.069	-0.042	-0.054	-0.030	-0.041	-0.022
	100	-0.068	-0.054	-0.064	-0.049	-0.054	-0.040	-0.043	-0.030	-0.031	-0.021
25	25	-0.114	-0.053	-0.108	-0.046	-0.092	-0.034	-0.072	-0.024	-0.053	-0.017
	50	-0.084	-0.051	-0.080	-0.047	-0.069	-0.036	-0.055	-0.026	-0.040	-0.019
	100	-0.068	-0.051	-0.064	-0.046	-0.054	-0.037	-0.042	-0.027	-0.031	-0.020
50	25	-0.113	-0.051	-0.107	-0.045	-0.092	-0.033	-0.072	-0.023	-0.053	-0.016
	50	-0.085	-0.051	-0.080	-0.046	-0.069	-0.036	-0.055	-0.026	-0.040	-0.019
	100	-0.068	-0.050	-0.064	-0.046	-0.054	-0.036	-0.042	-0.027	-0.031	-0.020

表２（b）検定の検出力（ρ =0.95，τ =0.1，ω_{ii}=1.0）

N	T	No Break t_i	No Break t_{pool}	No Break Z_{bar}	α=1 t_i	α=1 t_{pool}	α=1 Z_{bar}	α=2 t_i	α=2 t_{pool}	α=2 Z_{bar}	α=3 t_i	α=3 t_{pool}	α=3 Z_{bar}	α=4 t_i	α=4 t_{pool}	α=4 Z_{bar}
5	25	0.091	0.474	0.265	0.087	0.410	0.236	0.069	0.278	0.153	0.047	0.133	0.064	0.029	0.057	0.023
	50	0.146	0.887	0.653	0.138	0.837	0.602	0.108	0.685	0.424	0.072	0.449	0.209	0.045	0.237	0.084
	100	0.323	1.000	0.986	0.291	0.999	0.972	0.212	0.989	0.895	0.133	0.943	0.673	0.059	0.796	0.313
25	25	0.094	0.985	0.917	0.085	0.969	0.859	0.070	0.881	0.645	0.049	0.658	0.267	0.029	0.355	0.044
	50	0.147	1.000	1.000	0.138	1.000	1.000	0.110	1.000	0.995	0.073	0.999	0.907	0.043	0.981	0.506
	100	0.322	1.000	1.000	0.294	1.000	1.000	0.214	1.000	1.000	0.129	1.000	1.000	0.062	1.000	0.998
50	25	0.091	1.000	0.998	0.086	1.000	0.993	0.070	0.995	0.912	0.049	0.947	0.521	0.029	0.746	0.084
	50	0.147	1.000	1.000	0.137	1.000	1.000	0.110	1.000	1.000	0.074	1.000	0.998	0.043	1.000	0.856
	100	0.324	1.000	1.000	0.294	1.000	1.000	0.214	1.000	1.000	0.128	1.000	1.000	0.063	1.000	1.000

4．クロスセクション間におけるデータの従属性がパネル単位根検定に与える影響[10)]

4．1．クロスセクション間の相関の定式化

クロスセクション間においてデータに相関が存在する場合、その相関構造を考慮せずにパネル単位根検定を実行すれば、検定が深刻なサイズの歪み（size distortion）を持ち（O' Connell (1998)）、係数推定量にもバイアスが生じる（Phillips and Sul (2003)）ことが明らかにされている。

そこで以下では、クロスセクション間に存在するデータの相関について、DGP における誤差項間の相関としてモデル化し係数推定量と検定統計量が示す漸近的挙動を考察する。

DGP に以下の式を仮定する。

$$y_{it} = z_{it}$$
$$z_{it} = \rho_i z_{it-1} + u_{it} \tag{15}$$

ここで、誤差項 u_{it} は以下の $N \times 1$ 誤差ベクトル u_{t} の第 i 要素とする。

$$\mathrm{u}_{\mathrm{t}} = \mathrm{P}\varepsilon_{\mathrm{t}} \qquad \varepsilon_{it} \sim i.i.d.\ (0,1) \qquad \text{for all } i \text{ and } t$$

P は $N \times N$ の係数行列であり、u_{t} の分散共分散行列 $E(\mathrm{u}_{\mathrm{t}}\mathrm{u}_{\mathrm{t}}') = \Omega$ のコレスキー要素となる。また、Ω は以下で定義される正値対称行列である。

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N1} & \cdots & \omega_{NN} \end{pmatrix}$$

10）本節及び次節で示す定理の導出には、単一時系列における漸近理論の結果（特に汎関数中心極限定理と連続写像定理から得られる収束結果）を多変量時系列に拡張した場合の結果を利用している。本稿末の付録にはいくつかの結果を示す。

また、全ての t に対して $E(\mathrm{u_t u_t'}) = \Omega$ であり、$s \neq t$ のとき $E(\mathrm{u_t u_s'}) = \mathrm{O}$ とする[11)]。

回帰式は、$\hat{\phi}_{pool}$、t_{pool} に(2)式を用い、$\hat{\phi}_i$、Z_{bar} に(5)式を用いる。また、t_{pool} 検定と Z_{bar} 検定の帰無仮説及び対立仮説は、それぞれ(10)式と(11)式とする。

4．2．クロスセクション間の相関を無視した場合の影響

N を固定した下で $T \to \infty$ における係数推定量と検定統計量の漸近分布について、以下の定理に示す。

定理5． *DGP を(15)式とするとき、$T \to \infty$ について以下の結果を得る。*
（i）*(10)式の帰無仮説の下、(2)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

$$\hat{\phi}_{pool} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathrm{p_i'} \left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, d\mathrm{W}(r)' \right] \mathrm{p_i}}{\sum_{i=1}^{N} \mathrm{p_i'} \left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, \mathrm{W}(r)' dr \right] \mathrm{p_i}} \qquad \text{for fixed } N \tag{16}$$

$$t_{pool} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathrm{p_i'} \left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, d\mathrm{W}(r)' \right] \mathrm{p_i}}{\sqrt{N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \omega_{ii}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \mathrm{p_i'} \left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, \mathrm{W}(r)' dr \right] \mathrm{p_i}}} \qquad \text{for fixed } N \tag{17}$$

（ii）*(10)式の帰無仮説の下、(5)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

---

11) ここで扱う相関構造は Breitung and Das (2005) の weak dependence に対応する。$N \to \infty$ のとき、分散共分散行列の固有値が有限であるような相関を weak dependence と呼び、固有値が $O(N)$ であるような相関を strong dependence と呼ぶ。

$$\hat{\phi}_i \Rightarrow \frac{\mathrm{p}_\mathrm{i}' \left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, d\mathrm{W}(r)' \right] \mathrm{p}_\mathrm{i}}{\mathrm{p}_\mathrm{i}' \left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, \mathrm{W}(r)' dr \right] \mathrm{p}_\mathrm{i}} \tag{18}$$

$$t_i \Rightarrow \frac{\mathrm{p}_\mathrm{i}' \left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, d\mathrm{W}(r)' \right] \mathrm{p}_\mathrm{i}}{\sqrt{\omega_{ii}} \sqrt{\mathrm{p}_\mathrm{i}' \left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, \mathrm{W}(r)' dr \right] \mathrm{p}_\mathrm{i}}} = \kappa_i \tag{19}$$

$$Z_{bar} \Rightarrow \frac{\sqrt{N} \left\{ N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \kappa_i - E(t) \right\}}{\sqrt{Var(t)}} \qquad \text{for fixed } N \tag{20}$$

ここで、$\mathrm{W}(r) = (W_1(r), \cdots, W_N(r))'$ は多変量ブラウン運動であり、各要素は互いに独立な標準ブラウン運動である。また、p_i' は以下の P の第 i 行である。

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

定理5より、帰無仮説の下では、全ての係数推定量（$\hat{\phi}_{pool}$、$\hat{\phi}_i$）と検定統計量（t_{pool}、Z_{bar}）は p_i' をそれらの極限分布に含む。p_i' は第1要素から第 i 要素までの各要素に Ω の非対角要素 ω_{ij}（誤差項 $u_{i\cdot}$ と $u_{j\cdot}$ の共分散）を含むため、クロスセクション次元に相関が存在するとき（$\omega_{ij} \neq 0$　for some i, j、$i \neq j$）、その影響をデータに「伝達」する役割を果たす。したがって、この場合では時系列数 T が十分大きくても相関の影響は消失しないといえる[12)]。

12）クロスセクション間に相関が存在しない場合（$\omega_{io} = 0$　for all $i \neq j$）には、ベクトル p_i' は単位行列の第 i 行に $\omega_{ii}^{1/2}$ を掛けたものとなり、検定統計量の極限分布は t_{pool} が定理1（i）の第2式と同じ分布となり、t_i は Dickey-Fuller 分布となる。

⒂式のDGPにおいて、$\rho_i = 1.0$（for all i）、$\varepsilon_{it} \sim i.i.d.N(0,1)$と設定したもとで、（$N$，$T$）のいくつかの組み合わせに関してそれぞれ5,000回の繰り返し計算を行い、ϕ_{pool}、ϕ_iの推定値の平均値及びt_{pool}、Z_{bar}検定の棄却頻度を得た。結果をそれぞれ表3（a）、表4（a）に示す。表3（a）より、$\hat{\phi}_{pool}$について、ω_{ij}が大きくなるにつれて、真の値（$\phi_{pool} = 0$）からの乖離が拡大し、推定量の下方バイアスは大きくなる。しかし、Nが大きくなるとき、バイアスは若干軽減される。$\hat{\phi}_i$について、Tが小さいとき（$T = 25$）は下方バイアスが大きい。$\hat{\phi}_{pool}$の場合と異なり、バイアスの程度はNの大きさに影響を受けない。表4（a）より、t_{pool}、Z_{bar}統計量について、ω_{ij}が大きいとき、統計量の分散が拡大するため深刻なサイズの歪みが発生する。Nの増加は過剰棄却を緩和するのではなく、むしろ悪化させる結果となっている。一方、t_i統計量はクロスセクション間の相関に全く影響を受けない。

表3（a）係数推定値（ρ =1.0，ω_{ii}=1.0）

N	T	ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9	
		$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$
5	25	-0.062	-0.014	-0.062	-0.021	-0.061	-0.040
	50	-0.033	-0.007	-0.033	-0.011	-0.033	-0.022
	100	-0.017	-0.004	-0.017	-0.006	-0.017	-0.011
25	25	-0.062	-0.004	-0.062	-0.013	-0.062	-0.037
	50	-0.033	-0.003	-0.033	-0.007	-0.032	-0.019
	100	-0.017	-0.001	-0.017	-0.003	-0.017	-0.010
50	25	-0.062	-0.004	-0.061	-0.012	-0.064	-0.037
	50	-0.033	-0.002	-0.033	-0.007	-0.032	-0.018
	100	-0.017	-0.001	-0.017	-0.003	-0.017	-0.010

表4（a）検定のサイズ（ρ =1.0，ω_{ii}=1.0）

N	T	ω_{ij}=0.3			ω_{ij}=0.6			ω_{ij}=0.9		
		t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}
5	25	0.050	0.103	0.058	0.052	0.169	0.101	0.049	0.336	0.197
	50	0.052	0.097	0.063	0.051	0.160	0.103	0.051	0.342	0.207
	100	0.049	0.091	0.058	0.049	0.166	0.103	0.048	0.337	0.194
25	25	0.050	0.153	0.113	0.050	0.413	0.303	0.050	0.535	0.408
	50	0.050	0.165	0.117	0.049	0.431	0.312	0.048	0.543	0.391
	100	0.049	0.158	0.118	0.049	0.412	0.296	0.050	0.553	0.412
50	25	0.050	0.239	0.187	0.050	0.498	0.399	0.053	0.585	0.456
	50	0.050	0.238	0.176	0.049	0.522	0.421	0.047	0.583	0.451
	100	0.049	0.241	0.180	0.050	0.525	0.419	0.051	0.583	0.454

定理6． *DGPを⒂式とするとき、$T\to\infty$について以下の結果を得る。*

（i）*⑽式の対立仮説の下、⑵式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

$$\hat{\phi}_{pool} \xrightarrow{p} \frac{-\sum_{i=1}^{N}\omega_{ii}(1+\rho_i)^{-1}}{\sum_{i=1}^{N}\omega_{ii}(1-\rho_i^2)^{-1}} \qquad \text{for fixed } N$$

$$t_{pool}\to\infty \qquad (as\ N,\ T\to\infty)$$

（ii）*⑾式の対立仮説の下、⑸式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

$$\hat{\phi}_i \xrightarrow{p} \rho_i - 1$$

$$t_i\to -\infty$$

$Z_{bar} \to -\infty \qquad (as\ N,\ T \to \infty)$

定理６より、対立仮説の下では、全ての係数推定量と検定統計量の極限は、ρ_i'またはω_{ij}（for $i \neq j$）を含まない。したがって、漸近的には誤差項間のクロスセクション次元における相関に影響を受けない。また、$N, T \to \infty$のとき、$t_{pool} \to -\infty$、$Z_{bar} \to -\infty$であるから、両検定は一致性を持つ。t_i統計量は$\sqrt{T}$のオーダーで$-\infty$に発散するが、t_{pool}、Z_{bar}統計量$\sqrt{NT}$はのオーダーで$-\infty$に発散するため、時系列データの個別回帰から得た統計量よりもプール・データの回帰から得た統計量の方が検出力の向上が見込める。

定理５のモンテ・カルロ・シミュレーションの設定において、$\rho_i = 0.95$（for all i）とし、$\hat{\phi}_{pool}$、$\hat{\phi}_i$の推定値の平均値及びt_{pool}、Z_{bar}の検出力を計算した。結果をそれぞれ表３（b）、表４（b）に示す。表３（b）より、$\hat{\phi}_{pool}$について、ω_{ij}が大きく（$\omega_{ij} = 0.9$）、Tが小さいとき（$T = 25$）、下方バイアスが見られる。しかし、Nが増大することにより、バイアスの大きさは若干減少する。$\hat{\phi}_i$はω_{ij}の大きさとNの大きさに影響を受けず、Tが増大すれば下方バイアスは消失する。表４（b）において、数値はサイズ調整を行った後の検出力である[13)]。t_{pool}、Z_{bar}検定において、ω_{ij}の値の上昇に伴い検出力は減少する。一方、TやNの増大により、検出力は増加する。また、t_i検定の検出力よりt_{pool}、Z_{bar}検定のそれぞれの検出力の方が一貫してかなり大きい。

13）「実際の」分布の左片側５％点において測った検出力であり、サイズ調整済み検出力（size-adjusted power）という。

表3（b）係数推定値（ρ =0.95，ω_{ii}=1.0）

N	T	ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9	
		$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$
5	25	-0.113	-0.065	-0.114	-0.074	-0.113	-0.096
	50	-0.085	-0.059	-0.085	-0.064	-0.085	-0.076
	100	-0.068	-0.055	-0.069	-0.058	-0.068	-0.064
25	25	-0.114	-0.056	-0.114	-0.067	-0.113	-0.093
	50	-0.085	-0.054	-0.084	-0.060	-0.084	-0.075
	100	-0.068	-0.052	-0.068	-0.056	-0.067	-0.063
50	25	-0.113	-0.055	-0.113	-0.066	-0.115	-0.094
	50	-0.085	-0.053	-0.084	-0.059	-0.085	-0.075
	100	-0.068	-0.051	-0.068	-0.056	-0.069	-0.064

表4（b）検定の検出力（ρ =0.95，ω_{ii}=1.0）

N	T	ω_{ij}=0.3			ω_{ij}=0.6			ω_{ij}=0.9		
		t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}
5	25	0.087	0.304	0.267	0.089	0.267	0.218	0.094	0.177	0.143
	50	0.159	0.752	0.591	0.146	0.601	0.481	0.144	0.320	0.260
	100	0.312	0.990	0.965	0.303	0.941	0.858	0.343	0.647	0.550
25	25	0.093	0.844	0.736	0.097	0.571	0.436	0.084	0.224	0.169
	50	0.139	0.988	0.965	0.148	0.860	0.716	0.157	0.412	0.298
	100	0.348	1.000	1.000	0.336	0.991	0.960	0.340	0.720	0.574
50	25	0.087	0.901	0.822	0.094	0.633	0.471	0.095	0.218	0.157
	50	0.149	0.996	0.982	0.134	0.884	0.751	0.167	0.428	0.302
	100	0.320	1.000	1.000	0.347	0.991	0.966	0.310	0.751	0.599

5．混合効果

本節では、経済構造変化とクロスセクション間の相関が同時に存在する場合について、係数推定量と検定統計量の漸近的挙動を考察する。

DGP は⒂式に経済構造変化を表す変数 d_{it} を入れた以下の式である。

$$y_{it} = d_{it} + z_{it}$$
$$z_{it} = \rho_i z_{it-1} + u_{it} \tag{21}$$

回帰式及び仮説は前節までと同じものを採用する。

定理7． *DGPを(21)式とし、$\alpha_i = \delta_i$のとき、$T \to \infty$について以下の結果を得る。*
(i) *(10)式の帰無仮説の下、(2)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

$\hat{\phi}_{pool} \Rightarrow$　(16)式の右辺
$t_{pool} \Rightarrow$　(17)式の右辺

(ii) *(11)式の帰無仮説の下、(5)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

$\hat{\phi}_i \Rightarrow$　(18)式の右辺
$t_i \Rightarrow$　(19)式の右辺
$Z_{bar} \Rightarrow$　(20)式の右辺

定理8． *DGPを(21)式とし、$\alpha_i = \delta_i T^{1/2}$のとき、$T \to \infty$について以下の結果を得る。*
(i) *(10)式の帰無仮説の下、(2)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。*

$$\hat{\phi}_{pool} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[p_i'\left[\int_0^1 W(r)\,dW(r)'\right]p_i + \delta_i p_i' W(1)\right]}{\sum_{i=1}^{N}\left[p_i'\left[\int_0^1 W(r)\,W(r)'dr\right]p_i + \delta_i^2(1-\tau_i) + 2\delta_i p_i'\int_{\tau_i}^1 W(r)\,dr\right]} \quad \text{for fixed } N$$

$t_{pool} \Rightarrow$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\mathrm{p}_\mathrm{i}'\left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\,d\mathrm{W}(r)'\right]\mathrm{p}_\mathrm{i}+\delta_i\,\mathrm{p}_\mathrm{i}'\,\mathrm{W}(1)\right]}{\sqrt{\mathrm{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\omega_{ii}+\delta_i^2)}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\mathrm{p}_\mathrm{i}'\left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\mathrm{W}(r)'dr\right]\mathrm{p}_\mathrm{i}+\delta_i^2(1-\tau_i)+2\,\delta_i\,\mathrm{p}_\mathrm{i}'\int_{\tau_i}^1 \mathrm{W}(r)dr\right]}}$$

for fixed N

（ii）(11)式の帰無仮説の下、(5)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。

$$\hat{\phi}_i \Rightarrow \frac{\mathrm{p}_\mathrm{i}'\left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\,d\mathrm{W}(r)'\right]\mathrm{p}_\mathrm{i}+\delta_i\,\mathrm{p}_\mathrm{i}'\,\mathrm{W}(1)}{\mathrm{p}_\mathrm{i}'\left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\,\mathrm{W}(r)'dr\right]\mathrm{p}_\mathrm{i}+\delta_i^2(1-\tau_i)+2\,\delta_i\,\mathrm{p}_\mathrm{i}'\int_{\tau_i}^1 \mathrm{W}(r)\,dr}$$

$t_i \Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{p}_\mathrm{i}'\left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\,d\mathrm{W}(r)'\right]\mathrm{p}_\mathrm{i}+\delta_i\,\mathrm{p}_\mathrm{i}'\,\mathrm{W}(1)}{\sqrt{\omega_{ii}+\delta_i^2}\sqrt{\mathrm{p}_\mathrm{i}'\left[\int_0^1 \mathrm{W}(r)\,\mathrm{W}(r)'dr\right]\mathrm{p}_\mathrm{i}+\delta_i^2(1-\tau_i)+2\,\delta_i\,\mathrm{p}_\mathrm{i}'\int_{\tau_i}^1 \mathrm{W}(r)\,dr}}=\kappa_i$$

$$Z_{bar} \Rightarrow \frac{\sqrt{N}\left\{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\kappa_i - E(t)\right\}}{\sqrt{Var(t)}} \qquad \text{for fixed } N$$

定理7より、収束結果は定理5と全く同じである。したがって、$\alpha_i=\delta_i$のとき、係数推定量及び検定統計量の極限分布はクロスセクション間の相関構造

だけに依存する。定理８より、$\alpha_i = \delta_i T^{1/2}$ のとき、係数推定量及び検定統計量のそれぞれの極限分布は、構造変化の存在（δ_i、τ_i）とクロスセクション間の相関構造の両方に影響を受ける。

定理７と定理８より、帰無仮説の下では、構造変化の大きさ（α_i）が比較的小さいとき、クロスセクション間の相関の影響が構造変化の存在の影響よりも支配的となる（定理７の結果が優先して成立する）。他方、構造変化の程度が大きくなるとき、定理８の極限分布の分母に含まれる δ_i^2 の項の影響の増大により、統計量は０付近により分布し、その分散は縮小する。しかし、クロスセクション間に存在する相関において、その程度が強くなれば（ω_{ij} が大きくなれば）統計量の分散は拡大する。前者は検定のサイズを縮小させ、後者は拡大させる。したがって、その総効果は構造変化の大きさ（α_i）とクロスセクション間の相関の強さ（ω_{ij}）に依存する。

⑵1)式の DGP において、$\rho_i = 1.0$（for all i）、$\varepsilon_{it} \sim i.i.d.N(0,1)$ と設定したもとでモンテ・カルロ・シミュレーションを実行し、係数推定値の平均値及び検定の棄却頻度を得た。結果をそれぞれ表５(ａ)、表６(ａ)に示す。表５(ａ)より、$\hat{\phi}_i$、$\hat{\phi}_{pool}$ は若干の下方バイアスを示す。特に、$\hat{\phi}_i$ の方がその程度は大きい。クロスセクション間の相関が強くなれば、$\hat{\phi}_{pool}$ のバイアスは拡大する。しかし、$\hat{\phi}_i$ の値は変化しない。また、構造変化の程度が大きいほど両推定量のバイアスは縮小する。両推定量は T の増加に伴い、真の値０に近づく。表６(ａ)より、ω_{ij} が大きくなれば、t_{pool}、Z_{bar} 検定におけるサイズの歪みは拡大する。しかし、t_i ではこのような問題は見られない。N が大きいとき、t_{pool}、Z_{bar} 検定のサイズの歪みはより深刻である。さらに、T の増加はサイズの歪みを悪化させる。構造変化の程度が大きくなるにつれて、t_{pool}、Z_{bar} 検定のサイズは低下する。t_i は N の変化に一切影響を受けない。

表5（a）係数推定量（ρ =1.0，τ =0.1，ω_{ii}=1.0）

		α=1						α=5					
		ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9		ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9	
N	T	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$
5	25	-0.062	-0.014	-0.061	-0.020	-0.059	-0.039	-0.042	-0.012	-0.042	-0.020	-0.041	-0.033
	50	-0.034	-0.007	-0.034	-0.011	-0.034	-0.023	-0.030	-0.008	-0.029	-0.012	-0.027	-0.020
	100	-0.017	-0.003	-0.017	-0.005	-0.017	-0.011	-0.016	-0.004	-0.016	-0.006	-0.016	-0.011
25	25	-0.062	-0.005	-0.060	-0.013	-0.061	-0.037	-0.041	-0.007	-0.040	-0.015	-0.041	-0.031
	50	-0.033	-0.003	-0.033	-0.007	-0.034	-0.020	-0.028	-0.004	-0.028	-0.009	-0.028	-0.019
	100	-0.017	-0.001	-0.017	-0.004	-0.017	-0.010	-0.016	-0.002	-0.016	-0.004	-0.017	-0.011
50	25	-0.061	-0.004	-0.061	-0.013	-0.061	-0.036	-0.041	-0.006	-0.040	-0.015	-0.040	-0.030
	50	-0.034	-0.002	-0.033	-0.007	-0.033	-0.019	-0.028	-0.003	-0.028	-0.009	-0.027	-0.018
	100	-0.017	-0.001	-0.017	-0.003	-0.017	-0.010	-0.016	-0.002	-0.016	-0.004	-0.016	-0.010

		α=7						α=10					
		ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9		ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9	
N	T	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$
5	25	-0.027	-0.008	-0.027	-0.014	-0.027	-0.023	-0.013	-0.004	-0.014	-0.008	-0.014	-0.012
	50	-0.023	-0.006	-0.023	-0.011	-0.022	-0.017	-0.015	-0.004	-0.015	-0.008	-0.014	-0.012
	100	-0.014	-0.004	-0.014	-0.006	-0.014	-0.011	-0.011	-0.003	-0.012	-0.006	-0.012	-0.009
25	25	-0.028	-0.006	-0.028	-0.012	-0.028	-0.023	-0.014	-0.003	-0.014	-0.007	-0.013	-0.011
	50	-0.023	-0.004	-0.023	-0.008	-0.022	-0.017	-0.014	-0.003	-0.015	-0.007	-0.014	-0.012
	100	-0.015	-0.002	-0.015	-0.005	-0.014	-0.010	-0.012	-0.002	-0.012	-0.004	-0.012	-0.009
50	25	-0.027	-0.005	-0.027	-0.012	-0.028	-0.023	-0.014	-0.003	-0.014	-0.007	-0.014	-0.012
	50	-0.023	-0.004	-0.023	-0.008	-0.023	-0.017	-0.015	-0.003	-0.014	-0.006	-0.014	-0.011
	100	-0.015	-0.002	-0.014	-0.004	-0.015	-0.010	-0.011	-0.002	-0.012	-0.004	-0.012	-0.009

表６（a）検定のサイズ（ρ＝1.0，τ＝0.1，ω_{ii}＝1.0）

N	T	α=1									α=5								
		ω_{ij}=0.3			ω_{ij}=0.6			ω_{ij}=0.9			ω_{ij}=0.3			ω_{ij}=0.6			ω_{ij}=0.9		
		t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}
5	25	0.052	0.099	0.060	0.050	0.157	0.088	0.050	0.321	0.191	0.026	0.076	0.038	0.026	0.153	0.073	0.025	0.262	0.119
	50	0.051	0.101	0.056	0.051	0.174	0.103	0.052	0.347	0.206	0.041	0.105	0.060	0.038	0.176	0.097	0.034	0.301	0.153
	100	0.049	0.089	0.054	0.048	0.162	0.095	0.048	0.353	0.208	0.045	0.104	0.061	0.044	0.178	0.101	0.046	0.334	0.198
25	25	0.050	0.186	0.128	0.049	0.405	0.295	0.051	0.530	0.392	0.025	0.251	0.132	0.024	0.395	0.232	0.024	0.463	0.284
	50	0.049	0.167	0.121	0.047	0.415	0.297	0.052	0.548	0.409	0.039	0.264	0.169	0.038	0.444	0.291	0.037	0.508	0.346
	100	0.049	0.167	0.117	0.049	0.427	0.314	0.048	0.540	0.396	0.045	0.246	0.163	0.045	0.440	0.311	0.047	0.542	0.381
50	25	0.050	0.259	0.192	0.049	0.512	0.400	0.050	0.577	0.447	0.024	0.336	0.195	0.024	0.461	0.304	0.024	0.519	0.330
	50	0.050	0.266	0.195	0.050	0.519	0.413	0.049	0.582	0.457	0.038	0.373	0.257	0.039	0.511	0.378	0.035	0.560	0.387
	100	0.048	0.250	0.181	0.050	0.514	0.412	0.050	0.587	0.449	0.045	0.361	0.257	0.047	0.533	0.410	0.045	0.574	0.421

N	T	α=7									α=10								
		ω_{ij}=0.3			ω_{ij}=0.6			ω_{ij}=0.9			ω_{ij}=0.3			ω_{ij}=0.6			ω_{ij}=0.9		
		t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}
5	25	0.010	0.052	0.015	0.010	0.110	0.042	0.009	0.193	0.072	0.001	0.016	0.002	0.002	0.053	0.008	0.002	0.093	0.023
	50	0.027	0.080	0.037	0.027	0.166	0.078	0.027	0.255	0.128	0.012	0.048	0.016	0.011	0.127	0.050	0.010	0.194	0.075
	100	0.039	0.095	0.053	0.037	0.175	0.097	0.038	0.303	0.170	0.025	0.083	0.040	0.027	0.169	0.086	0.029	0.274	0.138
25	25	0.010	0.208	0.077	0.010	0.321	0.157	0.010	0.412	0.208	0.002	0.128	0.015	0.001	0.253	0.060	0.001	0.305	0.098
	50	0.026	0.262	0.138	0.028	0.403	0.248	0.027	0.468	0.282	0.011	0.195	0.070	0.012	0.338	0.167	0.011	0.414	0.202
	100	0.039	0.266	0.166	0.039	0.446	0.308	0.038	0.500	0.337	0.025	0.260	0.138	0.025	0.407	0.250	0.026	0.483	0.288
50	25	0.010	0.286	0.110	0.011	0.401	0.207	0.010	0.477	0.257	0.001	0.220	0.036	0.001	0.325	0.096	0.001	0.395	0.136
	50	0.028	0.356	0.219	0.027	0.462	0.308	0.028	0.520	0.336	0.011	0.290	0.119	0.011	0.403	0.202	0.010	0.470	0.244
	100	0.038	0.382	0.258	0.037	0.513	0.372	0.040	0.571	0.406	0.026	0.345	0.208	0.025	0.470	0.314	0.027	0.525	0.343

定理９． *DGP を(21)式とし、$\alpha_i=\delta_i$のとき、$T\rightarrow\infty$について以下の結果を得る。*
（i）(10)式の対立仮説の下、(2)式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。

$$\hat{\phi}_{pool} \xrightarrow{p} \frac{-\sum_{i=1}^{N} \omega_{ii}(1+\rho_i)^{-1}}{\sum_{i=1}^{N} \left\{\omega_{ii}(1-\rho_i^2)^{-1}+\delta_i^2(1-\tau_i)\right\}} \qquad \text{for fixed } N$$

$$t_{pool} \rightarrow -\infty \qquad (as\ N,\ T \rightarrow \infty)$$

（ii）⑾式の対立仮説の下、⑸式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。

$$\hat{\phi}_i \xrightarrow{p} \frac{-\omega_{ii}(1+\rho_i)^{-1}}{\omega_{ii}(1-\rho_i^2)^{-1}+\delta_i^2(1-\tau_i)}$$

$$t_i \rightarrow -\infty$$

$$Z_{bar} \rightarrow -\infty \qquad (\text{as } N/T \rightarrow 0、N,\ T \rightarrow \infty)$$

定理10. *DGP*を㉑式とし、$a_i = \delta_i T^{1/2}$のとき、$T \rightarrow \infty$について以下の結果を得る。

（i）⑽式の対立仮説の下、⑵式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。

$$\hat{\phi}_{pool} \xrightarrow{p} 0 \qquad \text{for any } N$$

$$t_{pool} \xrightarrow{p} 0 \qquad \text{⑿式の右辺}$$

$$t_{pool} \rightarrow -\infty \qquad (\text{as } N,\ T \rightarrow \infty)$$

（ii）⑾式の対立仮説の下、⑸式を回帰して得られる係数推定量と検定統計量は以下の極限に収束する。

$$\hat{\phi}_i \xrightarrow{p} 0$$

$t_i \xrightarrow{p}$ ⒀式の右辺

$Z_{bar} \xrightarrow{p}$ ⒁式の右辺

$Z_{bar} \to -\infty$ （$as\ N,\ T \to \infty$）

定理9より、係数推定量は構造変化を規定するパラメータ（δ_i、τ_i）とρ_i、ω_{ii}に依存する。検定統計量は、$N,\ T \to \infty$のとき、t_{pool}及びZ_{bar}統計量が共に$-\infty$に発散する。したがって、この場合においても、両検定は一致検定である。

$\alpha_i = \delta_i T^{1/2}$における定理10の収束結果は定理4と同一である。したがって、係数推定量は共に上方バイアスを持ち、検定統計量は、$N,\ T \to \infty$のとき、一致性を持つ。

⒇式のDGPにおいて、$\rho_i = 0.95$（for all i）、$\varepsilon_{it} \sim i.i.d.N(0,1)$とし、（$N$，$T$）のいくつかの組み合わせに関して、推定値の平均値及び検定統計量の棄却頻度をシミュレーションにより計算した。結果をそれぞれ表5（b）、表6（b）に示す。表5（b）より、構造変化の程度が大きくなるにつれて、$\hat{\phi}_i$、$\hat{\phi}_{pool}$に深刻な上方バイアスが発生する。また、これらの上方バイアスはNやTの増加によっても低減はしない。表6（b）より、ω_{ij}の値が大きくなれば、t_{pool}、Z_{bar}検定の検出力は大幅に低下する。ただし、t_i検定の検出力にはほとんど変化がない。Tが大きくなるとき、t_{pool}、Z_{bar}検定の検出力は増加する。また、Nが増加しても検出力は増加し、特にω_{ij}が小さいとき（$\omega_{ij} = 0.3$）の増加幅は大きい。また構造変化の程度が大きいとき、全ての検定統計量の検出力は大幅に低下する。最後に、先の表2（b）と表4（b）の結果と比較すると、構造変化の程度が大きくかつクロスセクション相関が強い場合、どちらか一方だけの場合よりも検出力は急激に低下することが分かる。

表5(b)係数推定量(ρ=0.95, τ=0.1, ω_{ii}=1.0)

N	T	α=1						α=5					
		ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9		ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9	
		$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$
5	25	-0.107	-0.061	-0.110	-0.072	-0.108	-0.092	-0.036	-0.019	-0.037	-0.025	-0.037	-0.033
	50	-0.081	-0.055	-0.080	-0.061	-0.081	-0.073	-0.029	-0.018	-0.030	-0.023	-0.029	-0.027
	100	-0.064	-0.051	-0.065	-0.055	-0.065	-0.061	-0.022	-0.017	-0.022	-0.019	-0.022	-0.021
25	25	-0.109	-0.053	-0.108	-0.064	-0.109	-0.090	-0.037	-0.017	-0.035	-0.021	-0.037	-0.032
	50	-0.081	-0.050	-0.080	-0.056	-0.079	-0.070	-0.029	-0.017	-0.029	-0.021	-0.029	-0.026
	100	-0.064	-0.048	-0.064	-0.052	-0.064	-0.060	-0.022	-0.016	-0.022	-0.018	-0.022	-0.021
50	25	-0.107	-0.051	-0.108	-0.063	-0.108	-0.089	-0.037	-0.016	-0.037	-0.022	-0.036	-0.031
	50	-0.081	-0.050	-0.080	-0.056	-0.081	-0.071	-0.029	-0.017	-0.029	-0.021	-0.030	-0.027
	100	-0.065	-0.048	-0.064	-0.052	-0.064	-0.059	-0.022	-0.016	-0.022	-0.018	-0.022	-0.021

N	T	α=7						α=10					
		ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9		ω_{ij}=0.3		ω_{ij}=0.6		ω_{ij}=0.9	
		$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$	$\hat{\phi}_i$	$\hat{\phi}_{pool}$
5	25	-0.018	-0.010	-0.018	-0.013	-0.018	-0.016	-0.008	-0.005	-0.008	-0.006	-0.008	-0.007
	50	-0.015	-0.010	-0.014	-0.012	-0.015	-0.014	-0.007	-0.005	-0.007	-0.006	-0.007	-0.007
	100	-0.012	-0.010	-0.012	-0.011	-0.012	-0.011	-0.006	-0.005	-0.006	-0.005	-0.006	-0.006
25	25	-0.018	-0.009	-0.018	-0.012	-0.018	-0.016	-0.008	-0.005	-0.008	-0.006	-0.008	-0.007
	50	-0.015	-0.010	-0.015	-0.011	-0.015	-0.014	-0.007	-0.005	-0.007	-0.006	-0.007	-0.007
	100	-0.012	-0.010	-0.012	-0.010	-0.012	-0.011	-0.006	-0.005	-0.006	-0.005	-0.006	-0.006
50	25	-0.018	-0.009	-0.018	-0.012	-0.017	-0.015	-0.008	-0.005	-0.008	-0.006	-0.008	-0.007
	50	-0.015	-0.010	-0.015	-0.011	-0.015	-0.014	-0.007	-0.005	-0.007	-0.006	-0.007	-0.006
	100	-0.012	-0.009	-0.012	-0.010	-0.012	-0.011	-0.006	-0.005	-0.006	-0.005	-0.006	-0.006

表 6（b）検定の検出力（$\rho=0.95$，$\tau=0.1$，$\omega_{ii}=1.0$）

		$\alpha=1$									$\alpha=5$								
		$\omega_{ij}=0.3$			$\omega_{ij}=0.6$			$\omega_{ij}=0.9$			$\omega_{ij}=0.3$			$\omega_{ij}=0.6$			$\omega_{ij}=0.9$		
N	T	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}
5	25	0.077	0.308	0.239	0.098	0.279	0.226	0.091	0.169	0.151	0.026	0.052	0.035	0.030	0.052	0.040	0.032	0.039	0.036
	50	0.134	0.662	0.579	0.147	0.532	0.422	0.131	0.295	0.224	0.026	0.085	0.055	0.031	0.088	0.064	0.032	0.050	0.041
	100	0.277	0.978	0.933	0.310	0.906	0.814	0.324	0.608	0.490	0.026	0.315	0.138	0.029	0.208	0.108	0.024	0.063	0.043
25	25	0.086	0.783	0.644	0.088	0.534	0.388	0.077	0.196	0.138	0.032	0.101	0.056	0.028	0.064	0.044	0.030	0.040	0.034
	50	0.131	0.971	0.927	0.146	0.816	0.666	0.134	0.353	0.259	0.029	0.339	0.137	0.033	0.167	0.084	0.030	0.056	0.043
	100	0.296	1.000	0.998	0.294	0.984	0.932	0.327	0.692	0.552	0.026	0.839	0.407	0.030	0.464	0.186	0.032	0.090	0.054
50	25	0.087	0.839	0.730	0.082	0.566	0.421	0.082	0.200	0.147	0.031	0.118	0.059	0.032	0.074	0.050	0.029	0.041	0.035
	50	0.141	0.986	0.957	0.129	0.843	0.704	0.140	0.382	0.278	0.028	0.403	0.158	0.031	0.184	0.087	0.039	0.069	0.051
	100	0.331	1.000	0.999	0.293	0.988	0.944	0.267	0.675	0.524	0.028	0.913	0.499	0.027	0.514	0.196	0.030	0.093	0.059

		$\alpha=7$									$\alpha=10$								
		$\omega_{ij}=0.3$			$\omega_{ij}=0.6$			$\omega_{ij}=0.9$			$\omega_{ij}=0.3$			$\omega_{ij}=0.6$			$\omega_{ij}=0.9$		
N	T	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}	t_i	t_{pool}	Z_{bar}
5	25	0.013	0.017	0.011	0.013	0.019	0.015	0.015	0.017	0.016	0.006	0.009	0.004	0.006	0.008	0.006	0.006	0.006	0.006
	50	0.008	0.022	0.009	0.007	0.019	0.010	0.008	0.013	0.011	0.001	0.002	0.001	0.001	0.002	0.000	0.001	0.001	0.001
	100	0.004	0.060	0.012	0.004	0.037	0.010	0.004	0.010	0.007	0.000	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25	25	0.015	0.031	0.011	0.014	0.023	0.015	0.012	0.013	0.013	0.006	0.016	0.004	0.007	0.009	0.006	0.006	0.006	0.006
	50	0.009	0.079	0.016	0.008	0.036	0.014	0.008	0.012	0.010	0.001	0.009	0.000	0.001	0.002	0.001	0.036	0.002	0.002
	100	0.004	0.416	0.049	0.003	0.114	0.019	0.004	0.012	0.005	0.000	0.028	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
50	25	0.013	0.038	0.015	0.013	0.024	0.018	0.011	0.012	0.011	0.006	0.014	0.002	0.006	0.010	0.005	0.006	0.008	0.007
	50	0.007	0.087	0.016	0.008	0.034	0.014	0.010	0.017	0.013	0.001	0.007	0.000	0.001	0.006	0.002	0.001	0.001	0.001
	100	0.003	0.520	0.068	0.004	0.133	0.025	0.002	0.011	0.003	0.000	0.045	0.000	0.000	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000

6．おわりに

本稿では、パネル単位根検定としてLevin, Lin, and Chu (2002) タイプの検定とIm, Pesaran, and Shin (2003) タイプの検定について、パネルデータにおける経済構造変化の存在とクロスセクション間の相関の存在がそれらの検定に及ぼす影響について、漸近理論とモンテ・カルロ・シミュレーションを用いて

考察を行った。同時に、回帰式から得られるARパラメータ推定量に関して、起こりうる推定バイアスについても検討した。

得られた分析結果から、多くの場合において期待された検定結果をもたらさないことが判明した。特に、経済構造変化とクロスセクション間の相関が並存するとき、構造変化の程度が大きいならば、パネル単位根検定（t_{pool}、Z_{bar}）は両者の影響を同時に受ける可能性がある。帰無仮説の下では、経済構造変化の程度が拡大すると検定の実質サイズは縮小するが、クロスセクション間の正相関の強さが増すにつれ検定の実質サイズは拡大する。対立仮説の下では、時系列数Tが小さいとき、パネル単位根検定の検出力は極めて低くなる。経済構造変化の大きさやクロスセクション相関の強さに依存するが、これらの単独の影響よりも深刻な検出力低下のケースがしばしば観察された。

参考文献

Bai, J. and Ng, S. (2004) "A PANIC attack on unit roots and cointegration," *Econometrica*, vol.72, pp.1127-1177.

Baltagi, B. H. and Kao, C. (2000) "Nonstationary panels, cointegration in panels and dynamic panels: a survey," *Advances in Econometrics*, vol.15, pp.7-51.

Banerjee, A. (1999) "Panel data unit roots and cointegration: an overview," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol.61, pp.607-629.

Breitung, J. (2000) "The local power of some unit root tests for panel data," *Advances in Econometrics*, vol.15, pp.161-177.

Breitung, J. and Das, S. (2005) "Panel unit root tests under cross-sectional dependence," *Statistica Neerlandica*, vol.59, pp.414-433.

Breitung, J. and Meyer, W. (1994) "Testing for unit roots in panel data: are wages on different bargaining levels Cointegrated?" *Applied Economics*, vol.26, pp.353-361.

Breitung, J. and Pesaran, M. H. (2005) "Unit roots and cointegration in panels," CWPE 0535, pp.1-50.

Choi, I. (2001) "Unit root tests for panel data," *Journal of International Money and Finance*, vol.20, pp.249-272.

Fisher, R. A. (1932) *Statistical Methods for Research Workers* 4th Edition, Edinburgh: Oliver & Boyd.

Im, K.-S., Pesaran, H. and Shin, Y. (2003) "Testing for unit roots in heterogeneous panels," *Journal of Econometrics*, vol.115, pp.53-74.

Levin, A., Lin, C.-F. and Chu, C. (2002) "Unit root test in panel data: Asymptotic and finite sample results," *Journal of Econometrics*, vol.108, pp.1-24.

Levin, A., and Lin, C.-F. (1993) "Unit root tests in panel data: asymptotic and finite-sample properties," Unpublished manuscript, University of California San Diego.

Leybourne, S. J., Mills, T. C., and Newbold, P. (1998) "Spurious rejection by Dickey-Fuller tests in the presence of a break under the null," *Journal of Econometrics*, vol.87, pp.191-203.

Leybourne, S. J. and Newbold, P. (2000a) "Behavior of Dickey-Fuller t-tests when there is a break under the alternative hypothesis," *Econometric Theory*, vol.16, pp.779-789.

Leybourne, S. J. and Newbold, P. (2000b) "Behaviour of the standard and symmetric Dickey-Fuller-type tests when there is a break under the null hypothesis," *Econometric Journal*, vol.3, pp.1-15.

Maddala, G. S. and Wu, S. (1999) "A comparative study of unit root tests with panel data and a new simple test," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol.61, pp.631-652.

Moon, H. R. and Perron, B. (2004) "Testing for unit root in panels with dynamic factors," *Journal of Econometrics*, vol.122, pp.81-126.

Nabeya, S. (1999) "Asymptotic moments of some unit root test statistics in the null case," *Econometric Theory*, vol.15, pp.139-149.

Nelson, C. M. (2001) *International Macroeconomics and Finance*, MA: Blackwell Publishing.

Nyblom, J. (1989) "Testing for the constancy of parameters over time," *Journal of the American Statistical Association*, vol.84, pp.223-230.

Ng and Vogelsang (2002) "Analysis of vector autoregressions in the presence of shifts in mean," *Econometric Reviews*, vol.21, pp.353-381.

Montanes, A. and Reyes, M. (1998) "Effect of a shift in the trend function on Dickey-Fuller unit root tests," *Econometric Theory*, vol.14, pp.355-363.

Montanes, A. and Reyes, M. (1999) "The asymptotic behaviour of the Dickey-Fuller tests under the crash hypothesis," *Statistics and Probability Letters*, vol.42, pp.81-89.

O'connell, P. G. J. (1998) "The overvaluation of purchasing power parity," *Journal of International Economics*, vol.44, pp.1-19.

Pesaran, M. H. (2007) "A simple panel unit root test in the presence of cross section dependence," *Journal of Applied Econometrics*, vol.27, pp.265-312.

Phillips, P. C. B. and Moon, H. R. (1999) "Linear regression limit theory for nonstationary panel data," *Econometrica*, vol.67, pp.1057-1111.

Phillips, P. C. B. and Sul, D. (2003) "Dynamic panel estimation and homogeneity testing under cross section dependence," *Econometrics Journal*, vol.6, pp.217-259.

Quah, D. (1990) "International patters of growth I: persistence in cross-country disparities," MIT working paper.

Quah, D. (1994) "Exploiting cross section variation for unit root inference in dynamic data," Economics Letters, vol.44, pp.9-19.

Tippett, L. H. C. (1931) *The Methods of Statistics* 1st Edition, London: Williams & Norgate.

付　　録

多変量汎関数中心極限定理といくつかの収束結果

DGPを以下のように定義する[14]。

$$y_t = y_{t-1} + u_t$$
$$u_t = P\varepsilon_t \qquad (1a)$$

ここで、y_t、u_tは共に$N\times 1$ベクトル、ε_tも$N\times 1$であり、$i.i.d.\,(0, I_N)$であるとする。また、Pは$N\times N$行列であり、$PP' = \Omega$（Ωは正値定符号）とし、PはΩのコレスキー要素であると仮定する。これより、$E(u_t u_t') = \Omega$となり、$\Omega \neq I_N$ならば(1a)式の誤差項はクロスセクション間でも相関を持つ。

多変量汎関数中心極限定理（Multivariate Functional Central Limit Theorem）により、以下の収束結果を得る[15]。

$$\frac{y_{[Tr]}}{\sqrt{T}} = \frac{\sum_{s=1}^{[Tr]} u_s}{\sqrt{T}} \Rightarrow P\cdot W(r) \qquad \text{as } T\to\infty$$

ここで、$(t-1)/T \leq r < t/T\ (t=1,\ldots,T)$であり、$[Tr]$は$Tr$以下の最大整数を表す。$W(r) = (W_1(r),\ldots, W_N(r))'$は多変量ブラウン運動であり、各要素は互いに独立な標準ブラウン運動である。Phillips and Durlauf (1986)より以下の結果を得る。

$$T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t \Rightarrow P\int_0^1 W(r)\,dr$$
$$T^{-2}\sum_{t=1}^{T} y_t y_t' \Rightarrow P\left(\int_0^1 W(r)\,dW(r)'dr\right)P'$$

14) 全ての導出において、$y_0 = 0$と仮定している。

$$T^{-1}\sum_{t=1}^{T} \mathrm{y_t u_t'} \Rightarrow \mathrm{P}\left(\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, dW(r)'dr\right)\mathrm{P}'$$

また、$\mathrm{p_i'}$を以下のPの第i行とする。

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{p_i'}$を用いて、以下の収束結果を得る。

$$\frac{\mathrm{y}_{i[Tr]}}{\sqrt{T}} \Rightarrow \mathrm{p_i'}\,\mathrm{W}(r)$$

$$T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{it} \Rightarrow \mathrm{p_i'}\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, dr$$

$$T^{-2}\sum_{t=2}^{T} y_{it-1}u_{it} \Rightarrow \mathrm{p_i'}\left(\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, d\mathrm{W}(r)'\right)\mathrm{p_i}$$

$$T^{-2}\sum_{t=1}^{T} y_{it}^2 \Rightarrow \mathrm{p_i'}\left(\int_0^1 \mathrm{W}(r)\ W(r)'dr\right)\mathrm{p_i}$$

ここで、

$$\mathrm{p_i'}\left(\int_0^1 \mathrm{W}(r)\, d\mathrm{W}(r)'\right)\mathrm{p_i} = (p_{i1}, \cdots, p_{i1}, 0, \cdots, 0)$$
$$\begin{pmatrix} \int_0^1 W_1(r)\, dW_1(r) & \cdots \int_0^1 W_1(r)\, dW_N(r) \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ \int_0^1 W_N(r)\, dW_1(r) & \cdots \int_0^1 W_N(r)\, dW_N(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ \vdots \\ p_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

15）例えば、White (1999) 第7章や Davidson (1994) 第25章を参照。

$$= p_{i1}\sum_{k=1}^{i} p_{ik}\int_0^1 W_1(r)\,dW_k(r) + \cdots + p_{ii}\sum_{k=1}^{i} p_{ik}\int_0^1 W_i(r)\,dW_k(r)$$

$$\mathrm{p}_\mathrm{i}'\left(\int_0^1 \mathrm{W}(r)\,\mathrm{W}(r)'dr\right)\mathrm{p}_\mathrm{i} = (p_{i1},\cdots,p_{ii},0,\cdots,0)\begin{pmatrix}\int_0^1 W_1^2(r)\,dr & \cdots\int_0^1 W_1(r)\,W_N(r)\,dr\\ \vdots & \ddots \quad \vdots\\ \int_0^1 W_N(r)\,\mathrm{W}_1(r)\,dr & \cdots\int_0^1 W_N^2(r)\,dr\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{i1}\\ \vdots\\ p_{ii}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= p_{i1}\sum_{k=1}^{i} p_{ik}\int_0^1 W_1(r)\,W_k(r)\,dr + \cdots + p_{ii}\sum_{k=1}^{i} p_{ik}\int_0^1 W_i(r)\,W_k(r)\,dr。$$

Effects of Economic Structural Change and Cross-Sectional Dependence on Panel Unit Root Tests

Takashi Matsuki

ABSTRACT

Based on the asymptotic theory and Monte Carlo simulation, this study investigates the effects of the presence of an economic structural change and cross-sectional dependence in panel data on the behavior of panel unit root tests. The study also examines the possible biases of the AR parameter estimators in regression. Two commonly used test statistics are considered. The first is the t-statistic obtained from a pooled regression model, and the second is the standardized cross-sectional average of N t-statistics, each of which is obtained from an individual regression model for each cross-sectional unit. The estimators of the AR coefficient are calculated in each regression.

Keywords : panel unit root test; structural change; cross-sectional correlation; panel data.

JEL Classification Numbers : C12; C15; C22.